Publications of the Korean Astronomical Society
26: 55 ∼ 70, 2011

ISSN 1225-1534 (Print)
DOI : 10.5303/PKAS.2011.26.2.055

우주구조 선형건드림 이론
COSMOLOGICAL LINEAR PERTURBATION THEORY

황재찬
경북대학교
Jai-chan Hwang
Kyungpook National University
E-mail: jchan@knu.ac.kr
(Received May 16, 2011; Accepted May 31, 2011)

ABSTRACT

Cosmological linear perturbation theory has fundamental importance in securing the current cosmological paradigm by connecting theories with observations. Here we present an explanation of the method used in relativistic cosmological perturbation theory and show the derivation of basic perturbation equations.

Key words: cosmological perturbation theory; cosmic microwave background radiation; cosmology; large-scale structure

1. 서론

현대물리우주론(이하 우주론)에서 관측된 우주는 큰 규모에서 공간이 균일(homogeneous)하고 등방(isotropic)한 우주모형으로 잘 기술된다고 가정한다. 이것이 공간이 균일등방인 프리드만(Friedmann) 우주모형이다. 관측은 빛을 내고 있는 은하들을 통해 이루어지며 그것들의 공간 분포는 꼭 균일등방하다고 보기는 어렵다. 우주론에서는 큰 규모에서 은하들의 분포가 균일등방에서 약간 벗어나 있다고 가정한다. 약간이라는 표현이 건드림(perturbation)을 선형(linear)으로 처리할 수 있다고 가정하면, 우주구조의 진화를 프리드만 우주모형에 추가된 선형건드림을 다루는 모형으로 고려하는 셈이 된다. 이것이 프리드만 우주모형의 선형 건드림 우주구조모형이다. 물론, 건드림의 양이 크면 비선형 건드림까지 고려할 수 있지만, 이러한 처리가 구조의 비선형진화를 정당하게 다루는 방법이라고 할 수는 없다.

이 글에서는 프리드만 우주모형에서 선형건드림을 다루는데 등장하는 기본 식들을 유도하는 과정을 자세하게 설명하고자 한다. 저자는 이러한 지극히 단순한 모델이 실제 우주를 얼마나 잘 모사할 수 있는지에 대한 판단은 유보한다. 단지 이 분야의 연구자들이 이 모형에 기반을 두고 우주론적 관측 사실들을 매우 성공적으로 기술한다고 자평한다는 점은 지적해 둔다. 그 관측사실에는 우주배경복사의 온도 편광 비등방도, 큰 규모에서 은하들의 질량과 속도 분포가 있다. 우주배경복사의 온도 비등방도는 십만분의 일 정도의 벗어남을 보이지만, 은하들의 분포는 작은 규모로 오며 명백히 비선형단계에 접어드는데 어느 규모 이상에서부터 선형가정이 적절한지는 판단하기 어렵다.

이 글에서 우리의 목표는 식 (75), (76), (78)을 완전하게 유도하는 것이다. 이 식들은 우주구조의 기원과 진화를 다루는 이론들에서 중요한 것들이니 한번 차분히 유도해 보는 것이 이 분야에 익숙해 지는데 도움이 될 것으

로 기대한다. 이 식들의 응용에 대해서는 뒤에 일부 소개하겠지만 식을 유도해 본 후에는 곧 응용 논문으로 넘어갈 수 있다.

제 2장에 요약한 아인슈타인(Einstein) 중력과 프리드만 우주모형을 유도하는 과정은 독자께서 이미 알고 있다고 가정한다.

2. 아인슈타인 중력과 배경우주모형

이 글에서 리만(Riemann) 텐서와 아인슈타인 중력식에 대한 기호약속은 다음과 같다

$$u_{a;bc} - u_{a;cb} = u_d R^d{}_{abc}, \tag{1}$$

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi G T_{ab} - \Lambda g_{ab}. \tag{2}$$

u_a는 임의의 벡터, $R^d{}_{abc}$는 리만 텐서, R_{ab}와 R은 리치(Ricci) 텐서와 스칼라 곡률, T_{ab}는 에너지-모멘텀 텐서, g_{ab}는 메트릭(metric) 텐서, Λ는 우주상수이다; 세미콜론“;”은 공변미분 기호다. 빛의 속도는 $c \equiv 1$로 택했으며, 우주상수 Λ는 에너지-모멘텀 텐서에 흡수될 수도 있다. 첨자 $a, b, c, \ldots$는 시간과 공간을 나타낸다. 식 (2)로부터 다음 에너지-모멘텀 보존식이 유도된다

$$T^b_{a;b} = 0. \tag{3}$$

아인슈타인 식은 다음 액션(action)으로부터 유도된다

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + L_m \right] d^4 x, \tag{4}$$

$$\delta \left(\sqrt{-g} L_m \right) \equiv \frac{1}{2} T^{ab} \delta g_{ab}. \tag{5}$$

우주론에서는 에너지-모멘텀에 대한 기여로 주로 유체나 스칼라장(scalar field)을 고려한다. 유체는 뒤에 선보이기로 하고 스칼라장은 다음과 같다

$$L_\phi = -\frac{1}{2} \phi^{;c} \phi_{,c} - V(\phi), \tag{6}$$

$$T^{(\phi)}_{ab} = \phi_{,a} \phi_{,b} - \frac{1}{2} g_{ab} \phi^{;c} \phi_{,c} - V g_{ab}, \tag{7}$$

$$\phi^{;c}{}_c = V_{,\phi}. \tag{8}$$

여기에서 ϕ가 스칼라장이다. 식 (4), (5)에서 식 (2)을 유도하는 것과 식 (4)-(6)에서 식 (7), (8)을 유도하는 것은 한번 해볼만하다. 여기까지는 일반적인 시공에 대한 것이며, 이제 우리의 우주모형에 대해 알아보자.

배경우주모형으로 공간이 균일등방인 로버트슨-워커(Robertson-Walker) 시공 메트릭(metric)을 택한다

$$ds^2 = -a^2 d\eta^2 + a^2 g^{(3)}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{9}$$

여기에서 $a(t)$는 모형의 스케일팩터(scale factor)이며, 시간은 t로 표현하는데 η는 $cdt \equiv a d\eta$로 정의되었으며 컨포말(conformal) 시간이라고 한다. 첨자 $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$는 공간을 나타낸다. $g^{(3)}_{\alpha\beta}$는 균일등방 공간에서 시간에 관계하지 않는 부분 메트릭텐서이며 보통 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} g^{(3)}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta &= \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \\ &= d\bar{\chi}^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} \bar{\chi}) \right]^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \\ &= \frac{1}{(1 + \frac{K}{4} \bar{r}^2)^2} \left(dx^2 + dy^2 + dz^2 \right), \end{aligned} \tag{10}$$

그리고

$$r \equiv \frac{\bar{r}}{1 + \frac{K}{4} \bar{r}^2}, \quad \bar{r} \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \bar{\chi} \equiv \int^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \tag{11}$$

이며, K는 공간 곡률의 부호로 규격화 하였다; 기하가 구(spherical), 편평(flat), 쌍곡(hyperbolic)인 경우 각각 $K = +1, 0, -1$이다. 이 경우 팽창에 참여하는 물질에 붙어있는 코무빙(comoving)-좌표 r은 차원이 없는 양이며 스케일 팩터 a는 길이의 차원을 갖는다. 여기에서 균일등방 공간의 메트릭이 왜 이와같이 표현되는지 유도하지는 않지만, 식 (10)의 좌표사이 관계를 식 (11)을 이용하여 유도해보는 것은 권장한다.

이제 에너지-모멘텀을 명시해야 하는데, 균일등방 공간에서 유체는 다음과 같이 표현된다

$$T^0_0 = -\mu, \quad T^0_\alpha = 0, \quad T^\alpha_\beta = p\delta^\alpha_\beta. \tag{12}$$

여기에서 μ와 p는 에너지밀도와 압력으로 해석된다. 에너지-모멘텀이 왜 이런 간단한 꼴로 되는지를 좀더 그럴듯하게 보여줄 수 있지만 여기에서는 일단 받아들이도록 한다. 식 (3)에서 다음 식을 유도할 수 있다

$$\dot{\mu} + 3H(\mu + p) = 0. \tag{13}$$

여기에서 $H \equiv \dot{a}/a$이다.

스칼라장도 유체로 해석될 수 있으며 다음과 같다

$$\mu_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \tag{14}$$

이 관계는 식 (7), (12)에서 유도된다. 식 (8) 또는 식 (13), (14)에서 다음 식이 유도된다

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \tag{15}$$

식 (2)에서 다음 두 식을 얻을 수 있다

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\mu - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{16}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\mu + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \tag{17}$$

세개의 식 (13), (16), (17)에서 두개만이 독립적이다. 이 식들이 프리드만 우주모형을 기술하는 기본식들이다(이 식들에서만은 빛의 속도 c를 복원하여 나타냈다).

한편, 유체가 먼지(dust), 복사(radiation), 스칼라장을 포함해 여러개인 경우는 다음과 같다

$$\mu = \sum_i \mu_i = \mu_d + \mu_r + \mu_\phi + \dots, \quad p = \sum_i p_i = p_d + p_r + p_\phi + \dots \tag{18}$$

이 경우 각 유체는 다음 식을 만족하는 것으로 본다

$$\dot{\mu}_i + 3H(\mu_i + p_i) = -\frac{1}{a}I_{i0}. \tag{19}$$

I_{i0}는 유체들 사이에 상호작용을 고려한 것이다; $T^b_{ia;b} \equiv I_{ia}$로 정의 하였다. 첨자 $i, j, k, ...$는 개별 유체나 스칼라장을 나타내는 기호이다. 여러 개의 유체와 스칼라장이 있는 경우에도 기본식 (13), (16), (17)은 그대로 성립한다.

식 (9), (10)의 로버트슨-워커 메트릭에서 임의의 좌표변환을 통해 얻은 어떠한 시공메트릭도 표현만 다를 뿐이지 물리적으로나 기하학적으로나 위의 로버트슨-워커 메트릭과 동일하다. 따라서 그렇게 등장한 건드림은 물리적인 것이 아니다. 유사하게, 좌표변환은 에너지-모멘텀에도 영향을 미치게 된다. 다음에 로버트슨-워커 메트릭과 에너지-모멘텀에 가장 일반적인 건드림을 추가하여 그것을 우주구조로 고려할 텐데, 우리는 물리적으로 의미있는 건드림에 관심이 있으므로, 그 건드림을 그저 단순한 좌표변환에서 발생한 것과 구분하여야 한다. 이것이 상대론적 건드림이론에서 발생하는 게이지(gauge) 문제이며 제 4장에서 자세하게 다루려한다.

3. 선형 건드림 기본식 유도

이 장에서는 프리드만 우주모형에 선형 건드림을 추가한 모형을 기술하는 기본식들을 유도한다. 앞에서 독자의 양해를 구했듯이 배경우주모형에 대해서는 독자께서 이미 아신다고 가정하였기에 위 식들의 유도를 요구하지 않

았다. 이 글의 목표는 건드림 식들을 유도해 보는 것이기에 이제부터 나오는 식들은 가능한 모두 유도해 보아야 한다. 물론 이러한 유도과정에서 배경식의 유도 또한 쉽게 따라나오는 것은 사실이다.

메트릭 텐서에서 가장 일반적인 건드림은 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$g_{00} = -a^2(1+2A), \quad g_{0\alpha} = -a^2 B_\alpha, \quad g_{\alpha\beta} = a^2\left(g^{(3)}_{\alpha\beta} + 2C_{\alpha\beta}\right). \tag{20}$$

선형 건드림을 표현하는 A, B_α, $C_{\alpha\beta}$는 각각 1, 3, 6개의 독립된 성분을 가짐으로 총 10개의 건드림을 표현한다; $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ 이다. 선형 가정은 앞으로의 계산에서 건드림량들의 비선형항들은 무조건 무시하겠다는 것이다.

역메트릭 텐서는 다음과 같다

$$g^{00} = -a^{-2}(1-2A), \quad g^{0\alpha} = -a^{-2}B^\alpha, \quad g^{\alpha\beta} = a^{-2}\left(g^{(3)\alpha\beta} - 2C^{\alpha\beta}\right). \tag{21}$$

이것은 역메트릭 텐서의 정의인 $g^{ab}g_{bc} \equiv \delta^a_c$를 이용하여 구한다. 여기에서 B_α, $C_{\alpha\beta}$와 같은 건드림량들의 공간성분은 $g^{(3)}_{\alpha\beta}$를 메트릭으로 그리고 $g^{(3)\alpha\beta}$를 역메트릭으로 사용하여 올리고 내리고 하는 것으로 약속한다. 이건 이렇게 약속할 수 있는데 약속한 것을 잊지 않으면 된다.

메트릭 텐서와 그 역을 이용하여 커낵션(connection)을 구할 수 있다

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a} + A', \quad \Gamma^0_{0\alpha} = A_{,\alpha} - \frac{a'}{a}B_\alpha, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = \frac{a'}{a}g^{(3)}_{\alpha\beta} - 2\frac{a'}{a}g^{(3)}_{\alpha\beta}A + B_{(\alpha|\beta)} + C'_{\alpha\beta} + 2\frac{a'}{a}C_{\alpha\beta}, \\
&\Gamma^\alpha_{00} = A^{|\alpha} - B^{\alpha\prime} - \frac{a'}{a}B^\alpha, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{a'}{a}\delta^\alpha_\beta + \frac{1}{2}\left(B_\beta{}^{|\alpha} - B^\alpha{}_{|\beta}\right) + C^{\alpha\prime}_\beta, \\
&\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^{(3)\alpha}{}_{\beta\gamma} + \frac{a'}{a}g^{(3)}_{\beta\gamma}B^\alpha + 2C^\alpha_{(\beta|\gamma)} - C_{\beta\gamma}{}^{|\alpha}.
\end{aligned} \tag{22}$$

여기에서 0은 η, 그리고 $\prime$은 η에 의한 시간미분을 나타낸다; | 표시는 $g^{(3)}_{\alpha\beta}$를 메트릭으로 사용한 공간 공변미분을 나타낸다. 커낵션의 정의는 다음과 같다

$$\Gamma^a_{bc} \equiv \frac{1}{2}g^{ad}\left(g_{bd,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}\right). \tag{23}$$

다음은 리이만 텐서를 구하는데 그 정의는

$$R^a{}_{bcd} \equiv \Gamma^a_{bd,c} - \Gamma^a_{bc,d} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ce} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{de}, \quad R_{ab} \equiv R^c{}_{acb}, \quad R \equiv R^a_a, \tag{24}$$

이며 결과는 다음과 같다

$$\begin{aligned}
&R^a{}_{b00} = 0, \quad R^0{}_{00\alpha} = -\left(\frac{a'}{a}\right)' B_\alpha, \quad R^0{}_{0\alpha\beta} = 0, \\
&R^0{}_{\alpha0\beta} = \left(\frac{a'}{a}\right)' g^{(3)}_{\alpha\beta} - \left[\frac{a'}{a}A' + 2\left(\frac{a'}{a}\right)' A\right] g^{(3)}_{\alpha\beta} - A_{,\alpha|\beta} + B'_{(\alpha|\beta)} + \frac{a'}{a}B_{(\alpha|\beta)} + C''_{\alpha\beta} + \frac{a'}{a}C'_{\alpha\beta} + 2\left(\frac{a'}{a}\right)' C_{\alpha\beta}, \\
&R^0{}_{\alpha\beta\gamma} = 2\frac{a'}{a}g^{(3)}_{\alpha[\beta}A_{,\gamma]} - B_{\alpha|[\beta\gamma]} + \frac{1}{2}(B_{\gamma|\alpha\beta} - B_{\beta|\alpha\gamma}) - 2C'_{\alpha[\beta|\gamma]}, \\
&R^\alpha{}_{00\beta} = \left(\frac{a'}{a}\right)' \delta^\alpha_\beta - \frac{a'}{a}A'\delta^\alpha_\beta - A^{|\alpha}{}_\beta + \frac{1}{2}\left(B_\beta{}^{|\alpha} + B^\alpha{}_{|\beta}\right)' + \frac{1}{2}\frac{a'}{a}\left(B_\beta{}^{|\alpha} + B^\alpha{}_{|\beta}\right) + C^{\alpha\prime\prime}_\beta + \frac{a'}{a}C^{\alpha\prime}_\beta, \\
&R^\alpha{}_{0\beta\gamma} = 2\frac{a'}{a}\delta^\alpha_{[\beta}A_{,\gamma]} - B_{[\beta}{}^{|\alpha}{}_{\gamma]} + B^\alpha{}_{|[\beta\gamma]} - 2\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \delta^\alpha_{[\beta}B_{\gamma]} - 2C^{\alpha\prime}{}_{[\beta|\gamma]}, \\
&R^\alpha{}_{\beta0\gamma} = \frac{a'}{a}\left(g^{(3)}_{\beta\gamma}A^{|\alpha} - \delta^\alpha_\gamma A_{,\beta}\right) + \left(\frac{a'}{a}\right)' g^{(3)}_{\beta\gamma}B^\alpha - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(g^{(3)}_{\beta\gamma}B^\alpha - \delta^\alpha_\gamma B_\beta\right) - \frac{1}{2}\left(B_\beta{}^{|\alpha} - B^\alpha{}_{|\beta}\right)_{|\gamma} \\
&\quad + C^{\alpha\prime}_{\gamma|\beta} - C'_{\beta\gamma}{}^{|\alpha}, \\
&R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = R^{(3)\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \left(\delta^\alpha_\gamma g^{(3)}_{\beta\delta} - \delta^\alpha_\delta g^{(3)}_{\beta\gamma}\right)(1-2A)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\left[g^{(3)}_{\beta\delta}\left(B_\gamma{}^{|\alpha}+B^\alpha{}_{|\gamma}\right)-g^{(3)}_{\beta\gamma}\left(B_\delta{}^{|\alpha}+B^\alpha{}_{|\delta}\right)+2\delta^\alpha_\gamma B_{(\beta|\delta)}-2\delta^\alpha_\delta B_{(\beta|\gamma)}\right]$$
$$+\frac{a'}{a}\left[g^{(3)}_{\beta\delta}C^{\alpha\prime}_\gamma-g^{(3)}_{\beta\gamma}C^{\alpha\prime}_\delta+\delta^\alpha_\gamma C'_{\beta\delta}-\delta^\alpha_\delta C'_{\beta\gamma}+2\frac{a'}{a}\left(\delta^\alpha_\gamma C_{\beta\delta}-\delta^\alpha_\delta C_{\beta\gamma}\right)\right]$$
$$+2C^\alpha_{(\beta|\delta)\gamma}-2C^\alpha_{(\beta|\gamma)\delta}+C_{\beta\gamma}{}^{|\alpha}{}_\delta-C_{\beta\delta}{}^{|\alpha}{}_\gamma. \tag{25}$$

이것을 유도하는 과정에서 다음을 이용하면 편리하다

$$B^\alpha{}_{|\beta\gamma}=B^\alpha{}_{|\gamma\beta}-R^{(3)\alpha}{}_{\delta\beta\gamma}B^\delta,\quad B_{\alpha|\beta\gamma}=B_{\alpha|\gamma\beta}+R^{(3)\delta}{}_{\alpha\beta\gamma}B_\delta,\quad R^{(3)\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}=K\left(\delta^\alpha_\gamma g^{(3)}_{\beta\delta}-\delta^\alpha_\delta g^{(3)}_{\beta\gamma}\right). \tag{26}$$

식 (26)의 마지막 관계식은 배경우주에 대한 것으로 여기에서 유도하지 않는다. 두 첨자에 둥근괄호와 꺾인괄호 표시는 각각 첨자 순서를 바꾼것과 더하거나 빼준 것을 반으로 나누어준 것을 나타낸다: $P_{(\alpha\beta)}\equiv\frac{1}{2}(P_{\alpha\beta}+P_{\beta\alpha})$, $P_{[\alpha\beta]}\equiv\frac{1}{2}(P_{\alpha\beta}-P_{\beta\alpha})$.

이쯤되면 이것을 어떻게 유도하나 하며 독자께서 질리실 수도 있겠는데 그래도 한번 유도해 보면 이 분야 연구를 시작하는데 큰 도움이 될 것으로 믿는다. 배경우주의 프리드만 식 (13), (16), (17)을 유도해 본 적이 있는 독자는 마음잡고 유도하면 며칠 정도면 이 글에 있는 건드림 식들을 모두 유도할 수 있다고 본다. 그러면 그 후에는 곧 자신있게 관련논문을 공부하러 갈 수 있는데 이 유도를 생략할 이유가 없지 않겠는가. 하지만 좀 바쁜 분들은 완전하지는 않지만 $K=0$인 경우를 유도해 보는 것도 좋다. 이 경우 $g^{(3)}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$가 되어 계산이 훨씬 쉬워진다. 물론 요즘 배경우주의 공간곡률이 영에 가깝다고 하니 공간곡률을 무시하고 계산해 보는 것이 꼭 아쉬운 것은 아니다.

이제 건드림을 다음과 같이 분리한다

$$A\equiv\alpha,\quad B_\alpha\equiv\beta_{,\alpha}+B^{(v)}_\alpha,\quad C_{\alpha\beta}\equiv g^{(3)}_{\alpha\beta}\varphi+\gamma_{,\alpha|\beta}+C^{(v)}_{(\alpha|\beta)}+C^{(t)}_{\alpha\beta}, \tag{27}$$

여기에서 $\alpha,\beta,\gamma,\varphi$는 스칼라형 건드림이라고 하며, $B^{(v)}_\alpha$와 $C^{(v)}_\alpha$는 $B^{(v)\alpha}{}_{|\alpha}=0=C^{(v)\alpha}{}_{|\alpha}$를 만족하며 벡터형 건드림, $C^{(t)}_{\alpha\beta}$는 $C^{(t)\alpha}{}_\alpha=0=C^{(t)\beta}{}_{\alpha|\beta}$를 만족하며 텐서형 건드림이라고 한다. 따라서 스칼라, 벡터, 텐서형에는 각각 4, 4, 2개로 총 10개의 독립된 건드림이 있다. 식 (25)에서 다음이 유도된다

$$R^0_0=\frac{1}{a^2}\left[3\left(\frac{a'}{a}\right)'-6\left(\frac{a'}{a}\right)'\alpha+3\varphi''+3\frac{a'}{a}(\varphi'-\alpha')-\Delta\alpha+\Delta(\beta+\gamma')'+\frac{a'}{a}\Delta(\beta+\gamma')\right],$$
$$R^0_\alpha=\frac{1}{a^2}\left\{2\left[\varphi'-\frac{a'}{a}\alpha-K(\beta+\gamma')\right]_{,\alpha}-\frac{1}{2}(\Delta+2K)\left(B^{(v)}_\alpha+C^{(v)\prime}_\alpha\right)\right\},$$
$$R^\alpha_\beta=\frac{1}{a^2}\left\{\left[\left(\frac{a'}{a}\right)'+2\left(\frac{a'}{a}\right)^2+2K\right]\delta^\alpha_\beta+\left[(\beta+\gamma')'+2\frac{a'}{a}(\beta+\gamma')-\alpha-\varphi\right]^{|\alpha}{}_\beta\right.$$
$$+\left\{\varphi''+\frac{a'}{a}\left[5\varphi'-\alpha'+\Delta(\beta+\gamma')\right]-\Delta\varphi-2\left[\left(\frac{a'}{a}\right)'+2\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]\alpha-4K\varphi\right\}\delta^\alpha_\beta$$
$$\left.+\frac{1}{2a^2}\left\{a^2\left[B^{(v)\alpha}{}_{|\beta}+B^{(v)|\alpha}_\beta+\left(C^{(v)\alpha}{}_{|\beta}+C^{(v)|\alpha}_\beta\right)'\right]\right\}'+C^{(t)\alpha\prime\prime}{}_\beta+2\frac{a'}{a}C^{(t)\alpha\prime}{}_\beta-(\Delta-2K)C^{(t)\alpha}{}_\beta\right\}, \tag{28}$$
$$R=\frac{1}{a^2}\left\{6\left[\left(\frac{a'}{a}\right)'+\left(\frac{a'}{a}\right)^2+K\right]+6\varphi''+6\frac{a'}{a}(3\varphi'-\alpha')\right.$$
$$\left.-12\left[\left(\frac{a'}{a}\right)'+\left(\frac{a'}{a}\right)^2\right]\alpha-12K\varphi+2\Delta\left[(\beta+\gamma')'+3\frac{a'}{a}(\beta+\gamma')-\alpha-2\varphi\right]\right\}. \tag{29}$$

여기에서 Δ는 $g^{(3)}_{\alpha\beta}$를 메트릭으로 사용한 공간에서 정의된 라플라시안(Laplacian) 미분기호다.

이제 건드림이 있는 에너지-모멘텀 텐서를 보자. 에너지-모멘텀 텐서의 건드림은 다음과 같이 도입한다

$$T^0_0\equiv-\mu-\delta\mu,\quad T^0_\alpha\equiv(\mu+p)\left(-v_{,\alpha}+v^{(v)}_\alpha\right),\quad T^\alpha_\beta\equiv(p+\delta p)\,\delta^\alpha_\beta+\Pi^\alpha_\beta,$$
$$\Pi_{\alpha\beta}\equiv\frac{1}{a^2}\left(\Pi_{,\alpha|\beta}-\frac{1}{3}g^{(3)}_{\alpha\beta}\Delta\Pi\right)+\frac{1}{a}\Pi^{(v)}_{(\alpha|\beta)}+\Pi^{(t)}_{\alpha\beta}. \tag{30}$$

여기에서 $\delta\mu$, δp, v, Π는 스칼라형 건드림이며, $v^{(v)}_\alpha$, $\Pi^{(v)}_\alpha$는 $v^{(v)\alpha}{}_{|\alpha} = 0 = \Pi^{(v)\alpha}{}_{|\alpha}$를 만족하며 벡터형 건드림, $\Pi^{(t)}_{\alpha\beta}$는 $\Pi^{(t)\alpha}_{\alpha} = 0 = \Pi^{(t)\beta}{}_{\alpha|\beta}$를 만족하며 텐서형 건드림이다. 건드림량들의 공간 첨자들은 $g^{(3)}_{\alpha\beta}$을 메트릭으로 삼은 텐서양들이다. 따라서 스칼라, 벡터, 텐서형에는 각각 4, 4, 2개로 총 10개의 독립된 건드림이 있다.

스칼라형 건드림의 진화를 나타내는 식들은 다음과 같다

$$\kappa - 3H\alpha + 3\dot{\varphi} + \frac{\Delta}{a^2}\chi = 0, \tag{31}$$

$$4\pi G\delta\mu + H\kappa + \frac{\Delta + 3K}{a^2}\varphi = 0, \tag{32}$$

$$\kappa + \frac{\Delta + 3K}{a^2}\chi - 12\pi G(\mu + p)av = 0, \tag{33}$$

$$\dot{\kappa} + 2H\kappa - 4\pi G\left(\delta\mu + 3\delta p\right) + \left(3\dot{H} + \frac{\Delta}{a^2}\right)\alpha = 0, \tag{34}$$

$$\dot{\chi} + H\chi - \varphi - \alpha - 8\pi G\Pi = 0, \tag{35}$$

$$\delta\dot{\mu} + 3H\left(\delta\mu + \delta p\right) - (\mu + p)\left(\kappa - 3H\alpha + \frac{1}{a}\Delta v\right) = 0, \tag{36}$$

$$\frac{[a^4(\mu + p)v]^\cdot}{a^4(\mu + p)} - \frac{1}{a}\alpha - \frac{1}{a(\mu + p)}\left(\delta p + \frac{2}{3}\frac{\Delta + 3K}{a^2}\Pi\right) = 0. \tag{37}$$

이 식들 중 첫번째는 κ의 정의이며, 나머지는 각각 G^0_0, G^0_α, $G^\alpha_\beta - \frac{1}{3}\delta^\alpha_\beta G^\gamma_\gamma$, $G^\alpha_\alpha - G^0_0$, $T^b_{0;b}$, $T^b_{\alpha;b}$ 식에서 유도된다.

위 식들은 가장 일반적인 유체에서 적용된다. 스칼라장도 하나의 유체로 해석될 수 있다. 이 경우 위 식들은 그대로 적용되며 유체량들만 다음으로 치환된다

$$\delta\mu = \dot{\phi}\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}^2\alpha + V_{,\phi}\delta\phi, \quad \delta p = \dot{\phi}\delta\dot{\phi} - \dot{\phi}^2\alpha - V_{,\phi}\delta\phi, \quad v = \frac{1}{a\dot{\phi}}\delta\phi, \quad v^{(v)}_\alpha = 0, \quad \Pi_{\alpha\beta} = 0. \tag{38}$$

이 관계식은 식 (7), (30)에서 유도된다. 스칼라장의 경우 식 (8)에서 유도된 다음 식이 추가된다

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} - \frac{\Delta}{a^2}\delta\phi + V_{,\phi\phi}\delta\phi - \dot{\phi}\left(\kappa + \dot{\alpha}\right) - \left(2\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}\right)\alpha = 0. \tag{39}$$

스칼라장의 경우 식 (36)은 식 (39)와 동일하며, 식 (37)은 자동으로 성립함을 보일 수 있다.

위 식들에서 $\chi \equiv a\beta + a^2\dot{\gamma}$ 로 정의하였다; β와 γ는 독립적으로 등장하지 않고 항상 χ라는 조합으로 나타난다. 건드림 기본식을 위와 같이 적는 것이 유리한 점은 뒤에 게이지 문제를 검토하면 명백해 질 것이다. 이 식들은 게이지 조건을 택하지 않은 일반적인 표현이다. 이렇게 게이지를 택하지 않고 식을 시작하는 방법은 제임스 바딘(James Bardeen) 교수가 처음 제안하였다(Bardeen, 1988; Hwang, 1991).

벡터형 건드림의 진화를 나타내는 식들은 다음과 같다

$$\frac{\Delta + 2K}{2a^2}\Psi^{(v)}_\alpha + 8\pi G(\mu + p)v^{(v)}_\alpha = 0, \tag{40}$$

$$\dot{\Psi}^{(v)}_\alpha + 2H\Psi^{(v)}_\alpha - 8\pi G\Pi^{(v)}_\alpha = 0, \tag{41}$$

$$\frac{[a^4(\mu + p)v^{(v)}_\alpha]^\cdot}{a^4(\mu + p)} + \frac{\Delta + 2K}{2a^2}\frac{\Pi^{(v)}_\alpha}{\mu + p} = 0, \tag{42}$$

이 식들은 각각 G^0_α, G^α_β, $T^b_{\alpha;b}$ 식에서 유도된다; 여기에서 $\Psi^{(v)}_\alpha \equiv B^{(v)}_\alpha + a\dot{C}^{(v)}_\alpha$이다.

텐서형 건드림 식은 G^α_β 식으로부터 다음과 같이 유도된다

$$\ddot{C}^{(t)}_{\alpha\beta} + 3H\dot{C}^{(t)}_{\alpha\beta} - \frac{\Delta - 2K}{a^2}C^{(t)}_{\alpha\beta} = 8\pi G\Pi^{(t)}_{\alpha\beta}. \tag{43}$$

식 (35), (41), (43)을 구하기 위해서는 먼저 G^α_β-식을 다음과 같이 쓰는 것이 편리하다

$$\frac{1}{a^2}\left(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \frac{1}{3}g^{(3)}_{\alpha\beta}\Delta\right)\left(\dot{\chi} + H\chi - \varphi - \alpha - 8\pi G\Pi\right) + \frac{1}{a^3}\left(a^2\Psi^{(v)}_{(\alpha|\beta)}\right)^\cdot - 8\pi G\frac{1}{a}\Pi^{(v)}_{(\alpha|\beta)}$$
$$+\ddot{C}^{(t)}_{\alpha\beta} + 3H\dot{C}^{(t)}_{\alpha\beta} - \frac{\Delta - 2K}{a^2}C^{(t)}_{\alpha\beta} - 8\pi G\Pi^{(t)}_{\alpha\beta} = 0. \tag{44}$$

식 (31)-(39), 식 (40)-(42), 식 (43)이 각각 스칼라형, 벡터형, 텐서형 우주구조의 선형진화를 기술하는 기본 식들이다. 이 식들은 아직 어떠한 조건도 부과하지 않은 상태로 유도한 가장 일반적인 형태를 보여준다.

한편 여러 개의 유체나 스칼라장이 있는 경우에는 유체량들을 다음과 같이 각 유체량의 총합으로 해석하면 위의 식들이 그대로 성립한다

$$\delta\mu = \sum_j \delta\mu_j, \quad \delta p = \sum_j \delta p_j, \quad (\mu + p)\, v = \sum_j (\mu_j + p_j)\, v_j, \quad \Pi = \sum_j \Pi_j, \quad etc. \tag{45}$$

여기에 추가하여 각각의 유체와 스칼라장의 건드림을 나타내는 식들이 있는데, 스칼라형 건드림의 경우에는

$$\delta\dot{\mu}_i + 3H\,(\delta\mu_i + \delta p_i) - (\mu_i + p_i)\left(\kappa - 3H\alpha + \frac{1}{a}\Delta v_i\right) + \frac{1}{a}\delta I_{i0} = 0, \tag{46}$$

$$\frac{[a^4(\mu_i + p_i)v_i]^\cdot}{a^4(\mu_i + p_i)} - \frac{1}{a}\alpha - \frac{1}{a(\mu_i + p_i)}\left(\delta p_i + \frac{2}{3}\frac{\Delta + 3K}{a^2}\Pi_i - \delta I_i\right) = 0, \tag{47}$$

$$\delta\ddot{\phi}_i + 3H\delta\dot{\phi}_i - \frac{\Delta}{a^2}\delta\phi_i + \sum_k V_{,\phi_i\phi_k}\delta\phi_k - \dot{\phi}_i\,(\kappa + \dot{\alpha}) - \left(2\ddot{\phi}_i + 3H\dot{\phi}_i\right)\alpha = 0. \tag{48}$$

그리고 벡터형 건드림의 경우에는 다음 식을 추가한다

$$\frac{[a^4(\mu_i + p_i)v^{(v)}_{i\alpha}]^\cdot}{a^4(\mu_i + p_i)} + \frac{\Delta + 2K}{2a^2}\frac{\Pi^{(v)}_{i\alpha}}{\mu_i + p_i} - \frac{1}{a}\frac{\delta I^{(v)}_{i\alpha}}{\mu_i + p_i} = 0. \tag{49}$$

식 (46), (47), (48), (49)는 각각 i-번째 유체나 스칼라장에 대한 $T^b_{0;b}$-, $T^b_{\alpha;b}$-식, 식 (8), $T^b_{\alpha;b}$-식에서 유도된다.

다음 장에서 건드림량들의 게이지 변환과 그 처리에 대하여 다룰 텐데, 여기에서는 우선 텐서형 건드림은 자연적으로 게이지-불변(gauge-invariant)이며, 벡터형 건드림은 게이지-불변인 형태로 구성하였으며, 스칼라형 건드림은 시간-게이지 변환에는 영향을 받지만 공간-게이지 변환에는 불변이 되도록 구성되어 있다는 점을 지적해 둔다. 이것이 무슨 뜻인지는 다음 장에서 자세하게 설명한다.

4. 게이지 문제

여기에서 게이지 이슈를 게이지 문제라고 번역했지만 상대론적 건드림 이론을 다루는데 게이지와 관련하여 어떤 문제가 있다는 것은 아니다. 이 점은 좀 강조할 필요가 있는데, 논문들이나 책들에서 게이지 선택과 관련하여 상당히 혼란스럽고 복잡하다는 인상을 주는 표현들이 흔히 등장하기 때문이다. 사실 전자기학이나 양-밀스(Yang-Mills) 게이지이론에서처럼 게이지는 문제를 다루는데 편하게 우리가 선택하도록 남아있는 추가적인 자유도이다. 따라서 게이지 선택은 문제를 다루는데 유리하도록 활용하면 되는 것이지 이것이 문제를 복잡하게 만드는 골칫거리는 아니다. 물론 잘못 활용하는 경우에는 골칫거리와 오류의 근원으로 작용할 수도 있겠지만, 이것은 저자들의 혼란일 뿐이지 게이지 선택이 이러한 혼란과 관련이 있는 것은 아니다. 이 글을 읽는 독자들 만큼은 이 글을 통해 앞으로 상대론적 건드림이론에서 게이지를 선택할때 문제를 다루는데 편리하고 유용하게 활용할 수 있으시기를 바라며 이제 시작해 보자.

앞 장에서 유도한 모든 식들은 어떠한 게이지 조건도 부과하지 않은 상태에서 구한 것이다. 식 (19) 아래 문단에서 배경우주모형에서도 좌표변환을 통해 메트릭과 에너지-모멘텀을 상당히 복잡하게 나타낼 수 있지만 그것은 좌표변환에서 발생한 효과일 뿐 물리적인 것은 아니라고 소개했다. 따라서 가장 일반적인 형태의 건드림이 추가된 메트릭과 에너지-모멘텀에는 그저 배경우주의 좌표변환으로도 발생할 수 있는 건드림이 포함되어 있을 것이다. 우리는 이 좌표변환의 효과를 추적하고 분리해 내서 순수하게 물리적인 건드림의 행동을 알아내고자 하는 것이다. 이것이 어려운 것은 아니다.

두 좌표계 x^a와 $\hat{x}^a$ 사이에 다음과 같은 좌표변환을 택하자

$$\hat{x}^a \equiv x^a + \tilde{\xi}^a(x^e). \tag{50}$$

여기에서 $\tilde{\xi}^a$는 건드림량이다. 임의의 스칼라, 벡터, 텐서양들은 좌표변환에 대해 다음과 같이 텐서 변환한다

$$s(x^e) = \hat{s}(\hat{x}^e), \quad v_a(x^e) = \frac{\partial\hat{x}^b}{\partial x^a}\hat{v}_b(\hat{x}^e), \quad t_{ab}(x^e) = \frac{\partial\hat{x}^c}{\partial x^a}\frac{\partial\hat{x}^d}{\partial x^b}\hat{t}_{cd}(\hat{x}^e). \tag{51}$$

이 텐서양들을 같은 시공위의 같은점 x^e에서 비교하면 다음과 같은 변환을 얻을 수 있다

$$\hat{s}(x^e) = s(x^e) - s_{,c}\tilde{\xi}^c, \quad \hat{v}_a(x^e) = v_a(x^e) - v_{a,b}\tilde{\xi}^b - v_b\tilde{\xi}^b{}_{,a}, \quad \hat{t}_{ab}(x^e) = t_{ab}(x^e) - 2t_{c(a}\tilde{\xi}^c{}_{,b)} - t_{ab,c}\tilde{\xi}^c. \quad (52)$$

이러한 텐서양들의 좌표에 따른 변환을 게이지 변환이라고 한다.

이제 ξ^α를 $g^{(3)}_{\alpha\beta}$을 메트릭으로 사용한 벡터양으로 다음과 같이 정의하자

$$\tilde{\xi}^0 \equiv \xi^0, \quad \tilde{\xi}^\alpha \equiv \xi^\alpha. \quad (53)$$

메트릭 텐서 g_{ab}의 게이지 변환으로부터 메트릭 건드림 량들의 게이지 변환을 다음과 같이 유도할 수 있다

$$\hat{A} = A - \left(\xi^{0\prime} + \frac{a'}{a}\xi^0\right), \quad \hat{B}_\alpha = B_\alpha - \xi^0{}_{,\alpha} + \xi'_\alpha, \quad \hat{C}_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} - \frac{a'}{a}\xi^0 g^{(3)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{(3)}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - g^{(3)}_{\gamma(\alpha}\xi^\gamma{}_{,\beta)}. \quad (54)$$

에너지-모멘텀 텐서 T_{ab}의 게이지 변환으로부터 유체량들의 게이지 변환을 다음과 같이 유도할 수 있다

$$\delta\hat{\mu} = \delta\mu - \mu'\xi^0, \quad \delta\hat{p} = \delta p - p'\xi^0, \quad -\hat{v}_{,\alpha} + \hat{v}^{(v)}_\alpha = -v_{,\alpha} + v^{(v)}_\alpha + \xi^0{}_{,\alpha}, \quad \hat{\Pi}_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta}. \quad (55)$$

스칼라장 ϕ의 게이지 변환으로부터 다음을 유도할 수 있다

$$\delta\hat{\phi} = \delta\phi - \phi'\xi^0. \quad (56)$$

여러 개의 유체와 스칼라장이 있는 경우 각 유체량과 스칼라장의 게이지 변환은 식 (55), (56)과 같은 꼴이며 단지 유체량과 스칼라장을 각각의 것으로 바꾸어 주면 된다. 상호작용 벡터 $I_{(i)a}$의 벡터 게이지 변환으로부터 다음이 유도된다

$$\delta\hat{I}_{(i)0} = \delta I_{(i)0} - \left(I_{(i)0}\xi^0\right)', \quad \delta\hat{I}_{(i)\alpha} = \delta I_{(i)\alpha} - I_{(i)0}\xi^0{}_{,\alpha}. \quad (57)$$

이제 ξ_α를 스칼라형과 벡터형으로 다음과 같이 분리하자

$$\xi_\alpha \equiv \frac{1}{a}\xi_{,\alpha} + \xi^{(v)}_\alpha, \quad (58)$$

여기에서 $\xi^{(v)\alpha}{}_{|\alpha} \equiv 0$이다. 좌표변환 효과인 게이지를 고정하기 위해 건드림량에 부과하는 조건을 게이지 조건이라고 한다. 세 가지의 게이지 효과 ξ^0, ξ, $\xi^{(v)}_\alpha$를 시간-게이지, 공간-게이지, 벡터(-공간)-게이지 모드라고 하자. 이 세 가지 게이지 모드를 처리하기 위해 우리는 세가지 건드림량들에 조건을 부과할 권리가 있다. 이 조건을 각각 시간-게이지, 공간-게이지, 벡터-게이지 조건이라고 한다. 곧이어 우리는 게이지 조건을 부과할 수도 있지만 게이지-불변인 조합을 구성하여 처리하는 방법도 있다는 것을 알게 된다.

시간으로 η 대신 t을 사용하면

$$\xi^0 = \frac{1}{a}\xi^t, \quad (59)$$

이며 식 (54), (55), (56)으로부터 건드림량들의 게이지 변환은 다음과 같이 정리 된다

$$\begin{aligned}
&\hat{\alpha} = \alpha - \dot{\xi}^t, \quad \hat{\beta} = \beta - \frac{1}{a}\xi^t + a\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\cdot}, \quad \hat{\gamma} = \gamma - \frac{1}{a}\xi, \quad \hat{\varphi} = \varphi - H\xi^t, \quad \hat{\chi} = \chi - \xi^t, \quad \hat{\kappa} = \kappa + \left(3\dot{H} + \frac{\Delta}{a^2}\right)\xi^t, \\
&\delta\hat{\mu} = \delta\mu - \dot{\mu}\xi^t, \quad \delta\hat{p} = \delta p - \dot{p}\xi^t, \quad \hat{v} = v - \frac{1}{a}\xi^t, \quad \hat{\Pi} = \Pi, \quad \delta\hat{\phi} = \delta\phi - \dot{\phi}\xi^t, \\
&\hat{B}^{(v)}_\alpha = B^{(v)}_\alpha + a\dot{\xi}^{(v)}_\alpha, \quad \hat{C}^{(v)}_\alpha = C^{(v)}_\alpha - \xi^{(v)}_\alpha, \quad \hat{\Psi}^{(v)}_\alpha = \Psi^{(v)}_\alpha, \quad \hat{v}^{(v)}_\alpha = v^{(v)}_\alpha, \quad \hat{\Pi}^{(v)}_\alpha = \Pi^{(v)}_\alpha, \\
&\hat{C}^{(t)}_{\alpha\beta} = C^{(t)}_{\alpha\beta}, \quad \hat{\Pi}^{(t)}_{\alpha\beta} = \Pi^{(t)}_{\alpha\beta}. \qquad (60)
\end{aligned}$$

여러 개의 유체나 스칼라장이 있는 경우에는 각 유체나 스칼라장의 게이지 변환은 다음과 같다

$$\begin{aligned}
&\delta\hat{\mu}_i = \delta\mu_i - \dot{\mu}_i\xi^t, \quad \delta\hat{p}_i = \delta p_i - \dot{p}_i\xi^t, \quad \hat{v}_i = v_i - \frac{1}{a}\xi^t, \quad \hat{\Pi}_i = \Pi_i, \quad \delta\hat{\phi}_i = \delta\phi_i - \dot{\phi}_i\xi^t, \\
&\hat{\Pi}^{(v)}_{i\alpha} = \Pi^{(v)}_{i\alpha}, \quad \hat{\Pi}^{(t)}_{i\alpha\beta} = \Pi^{(t)}_{i\alpha\beta}. \qquad (61)
\end{aligned}$$

식 (60), (61)에서 스칼라 건드림의 경우 β, γ만이 공간-게이지 변환 ξ에 관계하고 나머지 건드림 량들은 공간-게이지 변환에 불변인 것을 주목하자. 이것은 물론 건드림들이 공간-게이지 변환에 불변이 되도록 우리가 메트릭과 유체의 건드림량들을 도입했기 때문이다.

4.1. 게이지 조건

시간 게이지 조건은 어떤 건드림량에 조건을 부과하여 ξ^t를 고정하거나 또는 결정하는 것이다. ξ^t를 게이지 모드(gauge mode)라고 한다. 따라서 게이지 조건을 이용하여 게이지 모드를 결정하려는 것이다. 식 (60)에서 보듯이 스칼라 건드림만이 여기에 영향을 받는다. 이러한 조건은 무한가지가 가능하지만 식 (60)을 보면 다음에 보이는 조건들이 자연스럽게 나온다

$$\begin{aligned}
&\text{synchronous gauge :} && \alpha \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t(\mathbf{x}), \\
&\text{comoving gauge :} && v \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0, \\
&\text{zero}-\text{shear gauge :} && \chi \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0, \\
&\text{uniform}-\text{expansion gauge :} && \kappa \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0, \\
&\text{uniform}-\text{curvature gauge :} && \varphi \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0, \\
&\text{uniform}-\text{density gauge :} && \delta\mu \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0, \\
&\text{uniform}-\text{pressure gauge :} && \delta p \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0, \\
&\text{uniform}-\text{field gauge :} && \delta\phi \equiv 0 && \rightarrow && \xi^t = 0.
\end{aligned} \tag{62}$$

보다시피 신크로노스 게이지(synchronous gauge)를 제외하면 다른 모든 게이지 조건들은 게이지 모드인 ξ^t를 영으로 만들어 버린다. 이것을 게이지 조건이 게이지를 완전히 고정하거나 또는 완전히 제거했다고 한다. 이 경우 남아 있는 모든 건드림량들은 좌표변환의 효과가 아니라는 점에서 물리적이다. 한편, 신크로노스 게이지에서는 게이지 조건($\alpha \equiv 0$)을 부과한 후에도 게이지 모드인 ξ^t가 사라지지 않고 $\xi^t(\mathbf{x})$ 형태로 시간에는 관계하지 않지만 공간적으로는 일반적인 함수꼴인 형태로 남아있게 된다. ξ^t는 좌표변환의 효과 즉 게이지 모드이기 때문에 우리는 이 점을 알고 ξ^t의 역할을 예의 주시하며 추적하여야 한다. 물론 게이지 모드가 완전히 제거되는 게이지 조건을 택하는 것이 좋겠지만, 필요에 따라서 신크로노스 게이지 같은 조건을 택할 때에는 게이지 조건을 부과한 후에도 남는 게이지 모드가 단지 좌표변환의 효과임을 인식하고 그것의 행동을 잘 추적해주면 된다.

여러 개의 유체나 스칼라장이 있는 경우에는 시간-게이지 선택에 다음과 같은 몇가지 가능성이 더 있다

$$\delta\mu_{(i)} \equiv 0, \quad \delta p_{(i)} \equiv 0, \quad v_{(i)} \equiv 0, \quad \delta\phi_{(i)} \equiv 0. \tag{63}$$

이 모든 게이지 조건들도 게이지 모드들을 완전히 없엔다는 것을 식 (61)에서 쉽게 확인할 수 있다.

식 (62), (63)에 시간-게이지 조건을 부과하기 위해 선택한 건드림량들은 모두 공간-게이지 변환에 불변이다. 앞에서 스칼라형 건드림의 경우 β와 γ만이 공간-게이지 변환 ξ에 영향을 받는다는 것을 보였다. 식 (60)에서 β와 γ의 게이지 변환을 보면 공간-게이지 조건으로 $\gamma \equiv 0$을 택하면 $\xi = 0$이 되지만, 시간-게이지 조건으로 $\xi^t = 0$을 만든 후 공간-게이지 조건으로 $\beta \equiv 0$를 택하면 $\xi \propto a(t)$로 공간-게이지 모드가 완전히 제거되지 않음을 볼 수 있다. 따라서, $\beta \equiv 0$ 보다는 $\gamma \equiv 0$이 공간-게이지 모드를 완전히 제거하는 좋은 선택임은 명백하다. 그래도 꼭 $\beta \equiv 0$을 공간-게이지 조건으로 택해야만 한다면 게이지 조건을 부과한 후에도 게이지 모드 ξ가 남아 있다는 것을 기억하고 그 행동을 추적해 주어야 한다. 물론 여전히 $\gamma \equiv 0$을 택하는 것이 편리하다.

한편, β와 γ의 조합인

$$\chi \equiv a\beta + a^2\dot{\gamma}, \tag{64}$$

는 공간-게이지 (변환에) 불변이다. 앞장에서 유도한 우리의 기본식들은 β와 γ 대신 χ를 씀으로써 모든 건드림 량들이 공간-게이지 변환에 대해 불변이다. 이렇게 β와 γ가 항상 χ의 조합으로만 나타나서 공간-게이지 부분이 간단하게 처리된 것에는 그만한 이유가 있다. 그것은 우리가 고려하는 배경우주모형의 공간이 균일-등방하다는 것과 관련이 있다. 즉, 배경이 시간에 따라서는 변하지만 공간에 대해서는 균일등방 하다는 것이 이렇게 공간-게이지 자유도를 단순하게 처리할 수 있는 근거가 된다. 물론 이 말이 무슨 뜻인지 감이 안올 수도 있겠다는 생각도 드는데 그러한 경우에는 그냥 넘어가면 된다. 즉, 게이지 변환에 대한 수학적 처리가 이해가 되면 그 의미는 별것 아니니까 일단 넘어가도 된다.

벡터형 건드림에 대해서도 스칼라형 건드림의 공간-게이지 변환과 비슷한 양상이 전개된다. 식 (60)에서 벡터형-(공간)-게이지 조건으로 $C_\alpha^{(v)} \equiv 0$을 택하면 $\xi_\alpha^{(v)} = 0$이 되지만, $B_\alpha^{(v)} \equiv 0$을 택하면 $\xi_\alpha^{(v)} = \xi_\alpha^{(v)}(\mathbf{x})$가 되어 게이지-모드가 완전히 제거되지 않는다. 여기에서도 $B_\alpha^{(v)}$와 $C_\alpha^{(v)}$의 조합인

$$\Psi_\alpha^{(v)} \equiv B_\alpha^{(v)} + a\dot{C}_\alpha^{(v)}, \tag{65}$$

는 게이지-불변이다. 벡터형 건드림에 대한 우리의 기본식들은 게이지-불변인 건드림량들로 이루어져 있다.

식 (60)에서 보듯이 텐서형 건드림은 자연적으로 게이지-불변이다. 즉 텐서형 건드림은 좌표변환에 영향을 받지 않는다.

4.2. 게이지-불변량

시간-게이지 변환은 스칼라형 건드림에만 영향을 미친다. 식 (60)으로 부터 다음 조합들은 시간-게이지 불변임을 확인할 수 있다

$$\delta\mu_v \equiv \delta\mu - \dot{\mu}av, \quad \varphi_\chi \equiv \varphi - H\chi, \quad v_\chi \equiv v - \frac{1}{a}\chi, \quad \varphi_v \equiv \varphi - aHv, \quad \varphi_{\delta\phi} \equiv \varphi - \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi \equiv -\frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi_\varphi. \quad (66)$$

우리의 기본 건드림량들은 본래 공간-게이지 불변이므로 이 조합들은(시간-, 공간-게이지 모두에서) 완전히 게이지-불변이다. 게이지-불변인 건드림 조합을 나타내는 우리의 기호에는 몇가지 장점이 있다. 먼저, 보다시피 게이지-불변인 양을 구태여 새로운 기호로 표시하지 않고 두 개의 건드림량의 조합으로 표시함으로 기호를 절약한다. 이점은 중요한데, 식 (62)에서와 같이 우리가 게이지 조건으로 활용할 수 있는 건드림 량들이 여러개가 있다. 여러개 정도가 아니라 실은 주어진 건드림, 예를 들면, $\delta\mu$에 대해 무한가지 게이지-불변인 조합들을 구성할 수 있다. 무한가지인 이유는 게이지 조건으로 건드림 량들의 선형조합을 택할 수 있기 때문이다. 따라서 위와 같은 기호는 여러가지 게이지를 다룰 때 편리한데, 여기에 더하여 식 (66)의 마지막 관계에서 보듯이 이 기호 자체가 대수적인 처리를 가능하게 하기도 한다.

신크로노스 게이지를 제외하면 식 (62), (63)에 있는 어떤 선택된 게이지 조건에서 하나의 건드림은 그에 해당하는 유일한 게이지-불변인 조합을 가지고 있다. 예를 들면, 게이지-불변량 φ_χ는 $\chi \equiv 0$인 게이지에서 φ와 같다. 따라서 φ_χ는 zero-shear gauge에서 건드림 φ와 완전히 같다. 다른 말로 하면, zero-shear gauge에서 건드림 φ는 게이지-불변량 φ_χ와 완전히 같다.

어떤 하나의 건드림량에 대해서도 게이지-불변인 조합을 주는 무한가지의 게이지 조건이 가능하다보니, 어떤 건드림량이 게이지-불변이라는 것이 그 양이 물리적이라거나 측정가능하다거나 하는 것과는 거리가 멀다. 무엇이 물리적이며, 무엇이 측정가능한지는 전혀 다른 문제이며 아직도 논란이 있는 주제인데 뒤에 좀 더 설명한다.

5. 적용

식 (32), (33), 식 (33), (36), (37), 식 (35), 식 (35), (37), 그리고 식 (31), (33), (35)로부터 우리는 각각 다음을 유도할 수 있다

$$\frac{\Delta + 3K}{a^2}\varphi_\chi + 4\pi G\delta\mu_v = 0, \quad (67)$$

$$\delta\dot{\mu}_v + 3H\delta\mu_v - \frac{\Delta + 3K}{a^2}\left[a(\mu + p)v_\chi + 2H\Pi\right] = 0, \quad (68)$$

$$\varphi_\chi + \alpha_\chi + 8\pi G\Pi = 0, \quad (69)$$

$$\dot{v}_\chi + Hv_\chi - \frac{1}{a}\left(\alpha_\chi + \frac{\delta p_v}{\mu + p} + \frac{2}{3}\frac{\Delta + 3K}{a^2}\frac{\Pi}{\mu + p}\right) = 0, \quad (70)$$

$$\dot{\varphi}_\chi + H\varphi_\chi + 4\pi G(\mu + p)av_\chi + 8\pi GH\Pi = 0. \quad (71)$$

이 식들은 서로 다른 게이지를 택한 유체와 메트릭의 건드림들로 표현되어 있다. 이러한 게이지가 뒤섞인 형태의 표현을 처음 제안한 분은 바딘 교수이다(Bardeen, 1980). 선형 건드림에서는 $\delta\mu_v$, $-\varphi_\chi$, 그리고 v_χ이 각각 뉴턴 중력에서 밀도 건드림, 중력 포텐샬 건드림, 그리고 속도 건드림에 각각 해당한다(Harrison, 1967; Nariai, 1969; Bardeen, 1980, 1988; Hwang & Noh, 1999a, 1999b).

식 (71), 식 (67), (70), (71)에서 다음을 유도할 수 있다

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \varphi_v - \frac{K/a^2}{4\pi G(\mu + p)}\varphi_\chi \\ &= \frac{H^2}{4\pi G(\mu + p)a}\left(\frac{a}{H}\varphi_\chi\right)^{\cdot} + 2H^2\frac{\Pi}{\mu + p}, \end{aligned} \quad (72)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{Hc_s^2\Delta}{4\pi G(\mu+p)a^2}\varphi_\chi - \frac{H}{\mu+p}\left(e + \frac{2}{3}\frac{\Delta}{a^2}\Pi\right). \quad (73)$$

여기에서 엔트로피 건드림 e를 다음과 같이 도입하였다

$$\delta p \equiv c_s^2\delta\mu + e, \quad c_s^2 \equiv \frac{\dot{p}}{\dot{\mu}}. \quad (74)$$

이렇게 정의된 e는 게이지-불변이다. 식 (72), (73)에서 다음이 유도된다

$$\begin{aligned} \frac{H^2c_s^2}{(\mu+p)a^3}\left[\frac{(\mu+p)a^3}{H^2c_s^2}\dot{\Phi}\right]^{\cdot} - c_s^2\frac{\Delta}{a^2}\Phi &= \frac{Hc_s}{a^3\sqrt{\mu+p}}\left[v'' - \left(\frac{z''}{z} + c_s^2\Delta\right)v\right] \\ &= -\frac{H^2c_s^2}{(\mu+p)a^3}\left[\frac{a^3}{Hc_s^2}\left(e + \frac{2}{3}\frac{\Delta}{a^2}\Pi\right)\right]^{\cdot} - c_s^2\frac{2H^2}{\mu+p}\frac{\Delta}{a^2}\Pi, \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu+p}{H}\left[\frac{H^2}{(\mu+p)a}\left(\frac{a}{H}\varphi_\chi\right)^{\cdot}\right]^{\cdot} - c_s^2\frac{\Delta}{a^2}\varphi_\chi &= \frac{\sqrt{\mu+p}}{a^2}\left[u'' - \left(\frac{(1/\bar{z})''}{1/\bar{z}} + c_s^2\Delta\right)u\right] \\ &= \frac{4\pi G(\mu+p)}{H}\left[-\frac{H}{\mu+p}\left(e + \frac{2}{3}\frac{\Delta}{a^2}\Pi\right) - 2\left(H^2\frac{\Pi}{\mu+p}\right)^{\cdot}\right]. \end{aligned} \quad (76)$$

여기에서 다음 기호를 도입했다

$$v \equiv z\Phi, \quad u \equiv \frac{1}{\bar{z}}\frac{a}{H}\varphi_\chi, \quad c_s z \equiv \frac{a\sqrt{\mu+p}}{H} \equiv \bar{z}. \quad (77)$$

[식 (75)-(77)에서 v는 이 글의 다른 곳에서 쓰인 속도 건드림과 다른 기호이다.] v를 사용한 식은 필드(Field)와 쉐플리(Shepley)가 처음 도입하였다(Field & Shepley, 1968; Lukash, 1980a, 1980b; Chibisov & Mukhanov, 1982; Mukhanov, 1988). 식 (67), (76)이나 식 (67)-(70)을 이용하면 다음 식을 유도할 수 있다

$$\frac{\mu+p}{a^2\mu H}\left[\frac{H^2}{(\mu+p)a}\left(\frac{a^3\mu}{H}\delta_v\right)^{\cdot}\right]^{\cdot} - c_s^2\frac{\Delta}{a^2}\delta_v = \frac{\Delta+3K}{a^2}\left[\frac{e}{\mu} + \frac{2}{3}\frac{\Delta}{a^2}\frac{\Pi}{\mu} + 2\frac{\mu+p}{\mu H}\left(\frac{H^2}{\mu+p}\Pi\right)^{\cdot}\right]. \quad (78)$$

스칼라장의 경우에는 식 (14), (38), (67), (74)에서 다음이 유도된다

$$e = \left(1 - c_s^2\right)\delta\mu_{\delta\phi} = -\frac{1-c_s^2}{4\pi G}\frac{\Delta+3K}{a^2}\varphi_\chi, \quad \Pi = 0. \quad (79)$$

식 (72)는 $\Pi = 0$인채 그대로 성립하고 식 (73)은 다음과 같이 된다

$$\dot{\Phi} = \frac{Hc_A^2\Delta}{4\pi G(\mu+p)a^2}\varphi_\chi, \quad c_A^2\Delta \equiv \Delta + 3(1-c_s^2)K. \quad (80)$$

따라서 스칼라장인 경우 건드림 식은 효과적으로는 식 (75), (76), (77)에서 e와 Π를 없애고 c_s^2를 c_A^2로 바꾼것과 같다.

6. 풀이

앞 장에 유도된 기본식 (75), (76), (78)이 바로 이 글에서 독자께서 한번 유도해 보셨으면 하는 식들이다. 이 장에서는 이 식들의 몇가지 풀이에 대해 알아본다. 먼저 하나의 이상유체를 고려한다. 여기에서 이상유체라 함은 $e = 0 = \Pi$인 유체를 말한다.

(I) 음파-호라이즌(sound-horizon)보다 큰 규모에서는 식 (75), (76)에서 $c_s^2\Delta$ 항을 z''/z 이나 $(1/\bar{z})''/(1/\bar{z})$ 항과 비교해서 무시할 수 있다. 이 경우 다음과 같은 풀이를 유도할 수 있다

$$\Phi(k,t) = C(k) - d(k)\frac{k^2}{4\pi G}\int^t \frac{c_s^2H^2}{a^3(\mu+p)}dt, \quad (81)$$

$$\varphi_\chi(k,t) = 4\pi GC(k)\frac{H}{a}\int^t \frac{a(\mu+p)}{H^2}dt + d(k)\frac{H}{a}. \quad (82)$$

상수 $C(k)$와 $d(k)$는 팽창매질에서 시간에 따라 각각 자라는 풀이와 줄어드는 풀이들의 비례상수들이다. 여기에서 $\mathbf{k}$는 파(wave) 벡터이며 $k \equiv |\mathbf{k}|$로 정의하였다. 파수(wavenumber) k로 표현된 건드림 량들은 푸리에(Fourier) 공간에서의 값을 나타낸다. 우리의 선형이론에서는 푸리에 변환을 한 경우 각 푸리에 파수의 건드림은 다른 푸리에 파수의 건드림과 완전히 독립적으로 변한다. 따라서 우리는 건드림을 표현할 때 굳이 푸리에 공간에서의 값인지 실제 공간에서의 값인지 구별하지 않아도 된다. 우리의 식에서는 $\Delta = -k^2$로 바꾸어주면 된다.

위 풀이는 거대규모 항을 완전히 무시한 경우의 풀이인데, 거대규모 항의 역할을 테일러 전개했을 경우 그 다음으로 나타나는 것까지 고려한 풀이는 다음과 같다

$$\Phi = C\left\{1 + k^2\left[\int^\eta \bar{z}^2\left(\int^\eta \frac{d\eta}{z^2}\right)d\eta - \int^\eta \bar{z}^2 d\eta \int^\eta \frac{d\eta}{z^2}\right]\right\} - d\frac{k^2}{4\pi G}\int^\eta \frac{d\eta}{z^2}, \tag{83}$$

$$\varphi_\chi = 4\pi G C\frac{H}{a}\int^\eta \bar{z}^2 d\eta + d\frac{H}{a}\left\{1 + k^2\left[\int^\eta \frac{1}{z^2}\left(\int^\eta \bar{z}^2 d\eta\right)d\eta - \int^\eta \bar{z}^2 d\eta\int^\eta \frac{d\eta}{z^2}\right]\right\}. \tag{84}$$

위 풀이들은 배경우주 공간곡률 K와 우주상수 Λ가 있는 일반적인 경우에도 성립하며 시간에 따라 변화하는 일반적인 상태방정식 $p = p(\mu)$를 가정한 경우에도 성립한다는 점을 강조한다; $c_s^2 \equiv \dot{p}/\dot{\mu}$ 또한 일반적이다.

식 (81)에서 큰 규모에서 Φ의 자라는 풀이가 시간에 관계하지 않는다는 점을 눈여겨 보시기 바란다. 배경우주의 상태방정식이 변하는 것(예를 들면, 복사 모형에서 물질모형으로)에 무관하게 팽창우주에서는 Φ 값이 보존되는 것이다. 한편 식 (82)에서 φ_χ의 풀이는 시간에 따라 변한다. 더하여서 Φ의 감소하는 풀이는 φ_χ의 그것과 비교할 때 거대규모에서 무시되는 것을 볼 수 있다. Φ ($K = 0$ 인 경우에는 φ_v)가 바로 유명한 거대규모 보존량이다. φ_v는 $v = 0$인 comoving gauge에서 φ와 같다; φ는 공간곡률의 건드림으로 해석된다.

(II) 음파-호라이즌보다 작은 규모에서는 $c_s^2 k^2$ 항이 z''/z, 그리고 $(1/\bar{z})''/(1/\bar{z})$ 항보다 크다. 여기에서 c_s가 상수라고 가정하면 식 (75), (76)은 다음 일반풀이를 준다

$$v = z\Phi \propto e^{\pm i c_s k\eta}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{\mu + p}}\varphi_\chi \propto e^{\pm i c_s k\eta}. \tag{85}$$

(III) $K = 0 = \Lambda$ 이며 $w \equiv p/\mu$가 상수인 경우, 배경우주는 식 (13), (16)에서 다음과 같은 풀이를 갖는다

$$a \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}} \propto \eta^{\frac{2}{1+3w}}, \quad aH\eta = \frac{2}{1+3w}. \tag{86}$$

식 (77)에서 $z \propto \bar{z} \propto a$를 얻으며, 따라서

$$\frac{z''}{z} = \frac{2(1-3w)}{(1+3w)^2}\frac{1}{\eta^2}, \quad \frac{(1/\bar{z})''}{(1/\bar{z})} = \frac{6(1+w)}{(1+3w)^2}\frac{1}{\eta^2}. \tag{87}$$

이 경우 식 (75), (76)은 베셀(Bessel) 식이 되며 다음과 같은 풀이를 갖는다

$$v = z\Phi \propto \sqrt{\eta}\left(J_\nu(x), Y_\nu(x)\right), \quad x \equiv c_s k|\eta|, \quad \nu \equiv \frac{3(1-w)}{2(1+3w)}, \tag{88}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu + p}}\varphi_\chi \propto \sqrt{\eta}\left(J_{\bar{\nu}}(x), Y_{\bar{\nu}}(x)\right), \quad \bar{\nu} \equiv \frac{5+3w}{2(1+3w)}. \tag{89}$$

여기에서 $\bar{\nu} = \nu + 1$ 이다. 식 (72), (73)을 이용하면 풀이는 다음과 같이 된다

$$\Phi \equiv c_1(k)\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} + c_2(k)\frac{Y_\nu(x)}{x^\nu}, \tag{90}$$

$$\varphi_\chi = \frac{3(1+w)}{1+3w}\left(c_1(k)\frac{J_{\bar{\nu}}(x)}{x^{\bar{\nu}}} + c_2(k)\frac{Y_{\bar{\nu}}(x)}{x^{\bar{\nu}}}\right). \tag{91}$$

식 (67)에서 다음을 얻는다

$$\delta_v = \frac{(1+3w)^2}{6w}x^2\varphi_\chi. \tag{92}$$

큰 규모($x \ll 1$)에서는 다음과 같이 된다

$$\Phi = \frac{c_1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} - 2^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} x^{-2\nu} c_2. \tag{93}$$

$\nu = 0$인 경우에는 c_2-풀이에 $2 \ln x$ 값이 곱해진다. 식 (81)에 있는 풀이와 비교하면 다음 관계를 얻는다

$$c_1 = 2^\nu \Gamma(\nu+1) C, \quad c_2 = -\frac{1}{3(1+w)} \frac{\pi}{2^\nu \Gamma(\bar{\nu})} \frac{x^{2\bar{\nu}}}{a^2 \eta} d. \tag{94}$$

큰 규모($x \ll 1$)에서 풀이는 w가 상수인 경우 다음과 같이 정리된다

$$\Phi \quad \propto \quad C,\ da^{-\frac{3}{2}(1-w)}, \tag{95}$$

$$\varphi_\chi \quad \propto \quad C,\ da^{-\frac{5+3w}{2}}, \tag{96}$$

$$\delta_v \quad \propto \quad Ca^{1+3w},\ da^{-\frac{3}{2}(1-w)} \quad \propto \quad Ct^{\frac{2(1+3w)}{3(1+w)}},\ dt^{-\frac{1-w}{1+w}} \quad \propto \quad C\eta^2,\ d\eta^{-\frac{3(1-w)}{1+3w}}. \tag{97}$$

식 (97)은 식 (67)에서 유도된다; 일반적으로 $\delta_v \propto a^{1+3w} \varphi_\chi \propto \eta^2 \varphi_\chi$인 관계가 있다. 식 (97)은 잘 알려진 물질($w = 0$)시대와 복사($w = \frac{1}{3}$)시대를 포함한다

$$\begin{aligned} w = 0: &\quad \delta_v \quad \propto \quad Ca,\ da^{-\frac{3}{2}} \quad \propto \quad Ct^{\frac{2}{3}},\ dt^{-1} \quad \propto \quad C\eta^2,\ d\eta^{-3}, \\ w = \frac{1}{3}: &\quad \delta_v \quad \propto \quad Ca^2,\ da^{-1} \quad \propto \quad Ct,\ dt^{-\frac{1}{2}} \quad \propto \quad C\eta^2,\ d\eta^{-1}. \end{aligned} \tag{98}$$

따라서 comoving gauge에서 상대적 밀도 건드림인 δ_v는 복사시대에는 $\delta_v \propto a^2 \propto t$, 그리고 물질시대에는 $\delta_v \propto a \propto t^{2/3}$으로 천천히 잘 자란다.

이렇게 불안정성이 느긋하게 자라는 것은 진즈(Jeans)의 불안정에 따르면 정적인 매질에서 불안정이 지수함수 꼴로 자라는 것과 비교할만하다. 압력이 없는 이상유체의 경우 식 (78)은 다음과 같이 된다

$$\ddot{\delta}_v + 2H\dot{\delta}_v - 4\pi G\mu\delta_v = 0. \tag{99}$$

배경이 정적인 경우 $H = 0$이 되어 지수함수 풀이($\delta_v \propto e^{\pm\sqrt{4\pi G\mu}t}$)가 있음을 알 수 있다. 따라서 정적이며 균일-등방한 성간매질(물론 그런 곳이 있는지는 의심이 되지만)에서 별이 만들어지는 데에는 시간이 문제가 되지 않는다. 도리어 가속적으로 너무 빨리 자라는 바람에 선형이론을 적용할 틈이 없이 바로 비선형단계로 넘어가는 것이 문제가 될 수 있다. 과연 성간 구름들은 대부분 압축가능한 난류상태에 있다. 한편 우주와 같은 팽창매질에서는 어쩌면 불안정이 너무 천천히 자라서 탈일 수 있는데(사실 바로 그런 이유 때문에도 암흑물질이 필요하다), 좋은 점은 선형진화단계가 오래 지속될 수 있다는 것이다. 현재 우주구조형성론의 관점에서 보면 우주구조의 생성과 진화는 우주의 변화와 함께 했다.

팽창단계에서 상대적으로 자라는 C-풀이를 고려하면 다음을 얻는다

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = C(\mathbf{x}), \tag{100}$$

$$\varphi_\chi(\mathbf{x}, t) = \frac{3+3w}{5+3w} C(\mathbf{x}). \tag{101}$$

따라서 Φ 값은 큰 규모에서 배경우주의 상태방정식에 무관하게 보존되지만 φ_χ는 상태방정식의 변화에 민감하게 반응하며 변한다. Φ($K = 0$인 경우에는 φ_v)가 보존되는 양이지만 뉴턴중력포텐샬의 건드림에 해당하는 양은 $-\varphi_\chi$이다. 어떤 게이지-불변인 조합이 뉴턴적인 물리적 의미를 갖는가에 대한 논의는 다음 논문에서 살펴보았다(Hwang & Noh, 1999a). 여기에서 간단히 소개하면, δ_v, v_χ(혹은 κ_v), 그리고 $-\varphi_\chi$가 뉴턴체계에서 상대적인 밀도건드림, 속도건드림, 그리고 중력포텐샬의 건드림에 해당한다.

이 글에서 다루는 건드림 식은 선형이므로, 어떤 한 게이지 조건에서 단 하나의 건드림량에 대한 풀이를 얻을 수 있으면 그것으로부터 같은 게이지에서 모든 건드림량들에 대한 풀이가 선형조합으로 얻어지며 이를 이용하면 어떤 다른 게이지에서의 풀이들 또한 선형결합으로 얻을 수 있다. 따라서 게이지 조건은 수학적으로 문제를 가장 쉽게 다룰 수 있도록 활용하는 것이 좋다. 하여튼 위 풀이로부터 같은 조건들 하에서의 모든 게이지에서 모든 건드림량들의 진화를 알아낼 수 있다.

6.1. 벡터형

벡터형 건드림은 식 (40)-(42)로 기술된다. 이상유체를 가정하면 $\Pi_\alpha^{(v)} = 0$이며 식 (42)는 다음 풀이를 가진다

$$a \cdot a^3(\mu + p) \cdot v_\alpha^{(v)}(\mathbf{x}, t) = L_\alpha^{(v)}(\mathbf{x}). \tag{102}$$

따라서 벡터형 건드림은 각운동량 보존으로 기술되며 팽창하는 단계에서는 당연히 시간에 따라 감소하는 풀이만 있다. 식 (42)는 $T^b_{\alpha;b} = 0$에서 유도되며 따라서 이 결과는 중력장 식과 무관하다.

6.2. 텐서형

텐서형 건드림의 진화는 식 (43)으로 기술된다. $K = 0$ 이며 $\Pi_{\alpha\beta}^{(t)} = 0$인 경우 풀이를 알아보자. 이 경우 식 (43)은 다음과 같이 된다

$$\ddot{C}^{(t)}_{\alpha\beta} + 3H\dot{C}^{(t)}_{\alpha\beta} - \frac{\Delta}{a^2}C^{(t)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{a^3}\left[v^{(t)\prime\prime}_{\alpha\beta} - \left(\frac{a''}{a} + \Delta\right)v^{(t)}_{\alpha\beta}\right] = 0, \tag{103}$$

여기에서 $v^{(t)}_{\alpha\beta} \equiv aC^{(t)}_{\alpha\beta}$이다. 이 식은 식 (75)에있는 Φ식의 표현과 유사하다. 따라서 풀이도 유사하게 진행된다.
(I) 호라이즌보다 큰 규모 ($k^2 \ll a''/a$)에서의 풀이는 다음과 같다

$$C^{(t)}_{\alpha\beta}(k, t) = c^{(t)}_{\alpha\beta}(k) + d^{(t)}_{\alpha\beta}(k)\int^t \frac{dt}{a^3}. \tag{104}$$

따라서 팽창하는 경우 시간에 따라 사라지는 $d_{\alpha\beta}$-풀이를 무시하면 텐서형 건드림의 진화는 보존량 $c^{(t)}_{\alpha\beta}(k)$으로 기술된다.
(II) 호라이즌보다 작은 규모($k^2 \gg a''/a$)에서의 풀이는 다음과 같다

$$C^{(t)}_{\alpha\beta}(k, t) \propto \frac{1}{a}e^{\pm ik\eta}. \tag{105}$$

호라이즌 보다 작은 규모에서 텐서형 건드림은 물질과는 분리된 순수한 시공의 흔들림인 중력파로 해석될 수 있으며 시간이 감에 따라 적색이동으로 우주의 규모에 역비례하여 감소한다.
(III) $K = 0 = \Lambda$ 이며 w가 일정한 경우 다음의 완전한 풀이를 유도할 수 있다

$$v^{(t)}_{\alpha\beta} = aC^{(t)}_{\alpha\beta} \propto \sqrt{\eta}\left(J_\nu(x), Y_\nu(x)\right), \quad \nu \equiv \frac{3(1-w)}{2(1+3w)}, \quad x \equiv k|\eta|. \tag{106}$$

따라서

$$C^{(t)}_{\alpha\beta} = c^{(t)}_{1\alpha\beta}\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} + c^{(t)}_{2\alpha\beta}\frac{Y_\nu(x)}{x^\nu}, \tag{107}$$

이며 큰 규모에서는($x \ll 1$)

$$C^{(t)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}c^{(t)}_{1\alpha\beta} - 2^\nu\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}x^{-2\nu}c^{(t)}_{2\alpha\beta}, \tag{108}$$

가 되며 $\nu = 0$ 인 경우에는 $c^{(t)}_{2\alpha\beta}$-풀이에 $2\ln x$ 값이 곱해진다. 식 (104)에 있는 풀이와 비교하면 다음을 얻는다

$$c^{(t)}_{1\alpha\beta} = 2^\nu\Gamma(\nu+1)c^{(t)}_{\alpha\beta}, \quad c^{(t)}_{2\alpha\beta} = \frac{\pi}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}\frac{\eta x^{2\nu}}{a^2}d^{(t)}_{\alpha\beta}. \tag{109}$$

따라서

$$C^{(t)}_{\alpha\beta} \quad \propto \quad c^{(t)}_{\alpha\beta},\ d^{(t)}_{\alpha\beta}a^{-\frac{3}{2}(1-w)} \quad \propto \quad c^{(t)}_{\alpha\beta},\ d^{(t)}_{\alpha\beta}t^{-\frac{1-w}{1+w}} \quad \propto \quad c^{(t)}_{\alpha\beta},\ d^{(t)}_{\alpha\beta}\eta^{-\frac{3(1-w)}{1+3w}}. \tag{110}$$

7. 결론

이 글에서는 우주구조의 선형진화를 이론적으로 다루는 데 필요한 기본식들을 유도하고 게이지를 적절히 활용하는 방법에 대하여 설명하였다. 선형 건드림 이론은 초기우주 가속팽창(일명 인플레이션) 단계에서 양자요동으로부터 거대구조의 씨앗이 만들어지는 과정에서부터 우주배경 복사에 온도-편광 비등방도가 새겨지는 단계, 그리고 시간이 최근으로 오며 우주구조가 작은 규모에서 비선형 단계로 접어들기 전까지 적용되는 것으로 받아들여진다. 이렇게 계산된 선형 구조의 건드림량들은 뉴턴 중력에 기반을 둔 수치시뮬레이션의 초기조건으로 접속시키게 된다.

비선형 진화단계를 뉴턴중력이 아니라 아인슈타인 중력에서 다루면 좋겠지만 현재의 계산기 능력은 아직 그러한 단계까지 이르지 못한다. 한편, 비선형 진화단계로 접어드는 단계에 대해서는 비선형 건드림이론으로 추적해 볼 수 있다. 비선형 건드림은 식 (20)에서 건드림 량들이 선형이 아니라고 가정한 후 그 다음 계산을 원하는 비선형 항들을 유지하는 방법으로 다룰 수 있다(Noh & Hwang, 2004).

게이지-불변조합에 대한 논의는 바딘 교수가 지적하였는데 바딘 교수의 1980년 논문은 조금 어렵게 보일 수도 있겠지만 독자께서 꼭 읽어보시기를 권한다(Bardeen, 1980). 이 논문을 읽기에 어려움이 있으면 코다마(Kodama)와 사사키(Sasaki) 교수가 쓴 개괄논문의 앞부분을 함께 읽으면 많은 도움이 된다(Kodama & Sasaki, 1984).

한편, 이 글에서 소개한 게이지를 활용하는 방법에 대한 논의는 바딘 교수가 처음 제안 하였다(Bardeen, 1988; Hwang, 1991). 이 방법이 많은 장점을 가지고 있음에도 연구자들 사이에 널리 사용되지는 않았다. 보통은 계산을 시작하는 단계에서 게이지를 택해버리고는 하는데, 이런 방식은 게이지 자유도를 자유롭게 활용함으로써 얻을 수 있는 수학적인 혜택을 포기하는 셈이 된다.

우주배경복사의 온도-편광 비등방도를 다루기 위해서는 빛을 유체가 아닌 볼쯔만 식을 이용하여 다루어야 한다. 뉴트리노와 같은 충돌이 없는 입자들의 역할을 다룰 때에도 또한 볼쯔만 식을 이용한다. 이 글에서 쓰인 방법을 볼쯔만 식의 경우로 확장한 적용은 다음 논문에서 볼 수 있다(Hwang & Noh, 2002). 빛을 볼쯔만 식으로 제대로 다루는 대신 지오데식 식을 사용하여 삭스-볼프(Sach-Wolfe) 효과를 구하는 방법은 다음 논문에 소개되어 있다(Hwang & Noh, 1999b; Sach & Wolfe, 1967). 초기우주 가속팽창단계에서 양자요동에서 우주거대구조의 씨앗이 만들어지는 과정은 다음 논문에서 볼 수 있다(Hwang, 1993, 1994). 선형 건드림 이론을 일반화된 상대론적 중력이론으로 확장한 경우는 다음 논문에서 볼 수 있다(Hwang & Noh, 2005). 여러 개의 유체나 스칼라장이 있는 경우에 대한 연구는 다음 논문에서 볼 수 있다(Hwang & Noh, 2000, 2002).

이 글은 상대론적 건드림이론에 입문을 원하시는 독자께 실제 계산에 도움이 되는 내용을 담고자 노력하였다. 이 분야의 역사적인 전개과정이나 최근의 동향을 설명하지는 않고 이 글에 소개된 방법을 우주구조형성론에 적용한 논문들을 찾다보니 이 글 저자의 논문만을 집중해서 소개하게 된 것에 대해 독자께 양해를 구한다.

감사의 글

노혜림박사와 박찬경박사께서 글을 읽고 개선점을 알려주신점 감사드린다. 이 글은 KRF Grant funded by the Korean Government (KRF-2008-341-C00022)의 지원을 받았음을 밝힌다.

참고 문헌

Bardeen, J. M., 1980, Gauge-Invariant Cosmological Perturbations, Phys. Rev. D, 22, 1882

Bardeen, J. M., 1988, Particle Physics and Cosmology, edited by L. Fang and A. Zee (Gordon and Breach:London)

Chibisov, G. V. & Mukhanov, V. F., 1982, Galaxy Formation and Phonons, MNRAS, 200, 535

Field, G. B. & Shepley, L. C., 1968, Density Perturbations in Cosmological Models, Ap&SS, 1, 309

Harrison, E. R., 1967, Normal Modes of Vibrations of the Universe, Rev. Mod. Phys., 39, 862

Hwang, J., 1991, Perturbations of the Robertson-Walker Space - Multicomponent Sources and Generalized Gravity, ApJ, 375, 443

Hwang, J., 1993, Curved Space Quantum Scalar Field Theory with Accompanying Metric Fluctuations, Phys. Rev. D, 48, 3544

Hwang, J., 1994, Perturbative Semiclassical Approximation in the Uniform Curvature Gauge, Class. Quant. Grav., 11, 2305

Hwang, J. & Noh, H., 1999a, Relativistic Hydrodynamic Cosmological Perturbations, Gen. Rel. Grav., 31, 1131

Hwang, J. & Noh, H., 1999b, Sachs-Wolfe Effect: Gauge Independence and a General Expression, Phys. Rev. D, 59, 067302

Hwang, J. & Noh, H., 2000, Cosmological Perturbations with Multiple Scalar Fields, Phys. Lett. B, 495, 277

Hwang, J. & Noh, H., 2002, Cosmological Perturbations with Multiple Fluids and Fields, Class. Quant. Grav., 19, 527

Hwang, J. & Noh, H., 2002, Gauge-Ready Formulation of the Cosmological Kinetic Theory in Generalized Gravity Theories, Phys. Rev. D, 65, 023512

Hwang, J. & Noh, H., 2005, Classical Evolution and Quantum Generation in Generalized Gravity Theories Including String Corrections and Tachyons: Unified Analyses, Phys. Rev. D, 71, 063536

Kodama H. & Sasaki, M., 1984, Cosmological Perturbation Theory, Prog. Theor. Phys. Suppl., 78, 1

Lukash, V. N., 1980a, Production of Sound Waves in the Early Universe, Sov. Phys. JETP Lett., 31, 596

Lukash, V. N., 1980b, Production of Phonons in an Isotropic Universe, Sov. Phys. JETP, 52, 807

Mukhanov, V. F., 1988, Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations, Sov. Phys. JETP, 68 1297

Nariai, H., 1969, The Lagrangian Approach to the Gravitational Instability in an Expanding Universe, Prog. Theor. Phys., 41, 686

Noh, N. & Hwang, J., 2004, Second-Order Perturbations of the Friedmann World Model, Phys. Rev. D, 69, 104011

Sachs, R. K. & Wolfe, A. M., 1967, Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background, ApJ, 147, 73